

Yer dalgası yayılımının zaman ve frekans domeninde sayısal modellemesi

¹Funda AKLEMAN*, ²Levent SEVGİ, ¹Ercan TOPUZ

¹İTÜ Elektrik Elektronik Fakültesi, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü, 34469, Ayazağa, İstanbul

²Doğuş Üniversitesi, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü, Kadıköy, İstanbul

Özet

Dünya üzerinde seçilen herhangi iki nokta arasındaki yer dalgası yayılım problemi, yirminci yüzyılın başından bu yana ilgi odağı olmasına karşın, henüz sayısal olarak hesaplanabilen analitik tam çözüm ya da genel olarak uygulanabilecek üç boyutlu sayısal çözüm bulunamamıştır. Bu çalışmada, problemin çözümü için kullanılmakta olan ışın – mod çözümü gibi yaklaşık analitik ve Fourier dönüşümü yardımı ile parabolik denklem çözümüne dayanan yarı analitik –sayısal teknikler geçerlilik bölgeleri ile birlikte ayrıntılı olarak incelenmiştir. Daha sonra, yer dalgası yayılım probleminin çözümü için zamanda sonlu farklar tekniğine dayanan, saf sayısal yeni bir yöntem önerilmiş ve bahsedilen diğer teknikler ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Yer dalgası yayılımı, Zamanda sonlu farklar, ışın – mod çözümü, parabolic denklem, TDWP.

Time and frequency domain numerical modelling of ground wave propagation

Abstract

Ground wave propagation problem has been a subject of interest from the beginning of the 20th century. The model environment used in this study is a spherical earth, which may have various ground characteristics above which exists a radially inhomogeneous atmosphere. Using this canonical model we pose ourselves the following problem: Determine the ground wave propagation characteristics between two points, which may be selected anywhere on or above the ground. The problem is very complex and neither a full-wave numerically computable analytical solution, nor a three-dimensional (3D), generally applicable numerical solution has yet appeared. Therefore analytical approximate solutions or two-dimensional (2D) numerical approaches have so far been used. Here, first we consider ray – mode solutions and Split Step Parabolic Equation (SSPE) method, and then introduce a novel pure numerical method, which is based on the Finite-Difference Time Domain (FDTD) technique and applicable for a broad range of propagation problems. Since the propagation region is always larger than the available FDTD space, the propagating pulse is traced within a sliding window and this method is named as Time-Domain Wave-Propagator (TDWP). The results obtained via TDWP are compared with the data obtained via ray – mode solutions and/or SSPE technique within their domains of validity and good agreement is observed.

Keywords: Ground wave propagation, FDTD, ray – mode solutions, parabolic equation, TDWP.

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Funda AKLEMAN. funda@ehb.itu.edu.tr; Tel: (212) 285 36 29.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Elektrik Elektronik Fakültesi'nde tamamlanmış "Yer dalgası yayılımının zaman ve frekans domeninde sayısal modellenmesi" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 17.05.2002 tarihinde dergiye ulaşmış, 25.09.2002 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 28.02.2002 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Giriş

Küresel koordinatlardaki karmaşık empedans koşullarının yanı sıra, zamanda ve konumda değişim gösteren ortam parametrelerinin göz önüne alınması gerektiğinden, gerek yeryüzüne yakın troposfer tabakası içinde, gerekse, iyonosfer ile yeryüzü arasındaki elektromanyetik dalga yayılımı problemlerinin analitik olarak modellenmesinde güçlükler söz konusudur. Yüzyılın başından beri ilgi odağı olan bu problemler yakın zamana kadar sadece yaklaşık analitik yöntemlerle ele alınabilmiş olmalarına karşın, son yıllarda özellikle bilgisayarlardaki gelişmeye paralel olarak yarı analitik-yarı sayısal yöntemler elektromanyetik (EM) dalga yayılımının analiz ve modelleme çalışmalarında yoğun bir şekilde kullanılır hale gelmiştir.

Dünya üzerinde herhangi iki nokta arasındaki radyo dalgası, gök ve yer dalgaları ile iletilir. Gök dalgaları iyonosfer, yer dalgaları ise troposfer tabakasından etkilenirler. Bu çalışmada, troposfer içinde EM dalga (yer dalgası) yayılımı incelenmektedir.

EM dalga yayılımı

Çok algılayıcı tümleşik gözetleme, taktik balistik füzelere karşı erken uyarı, orta ve uzun mesafeli haberleşme, sürekli okyanusbilimsel ve meteorolojik izleme, uzaktan algılama, gezgin iletişimde hücre ve servis planlama olarak gruplanabilen sistemlerin tümünde, uygulama alanı ne olursa olsun (servis planlaması, gözetleme, haberleşme vs.), yeryüzü üzerindeki iki nokta arasındaki EM dalga yayılımı karakteristiklerinin ve yol kaybının belirlenebilmesi gerekmektedir. Dünya üzerinde EM dalga yayılımı incelenirken:

- Atmosferdeki yüksekliğe ve mesafeye bağlı değişimler,
- Çalışma frekansı,
- Alıcı verici konumları,
- Yeryüzü geometrisi (yüksekti farklılıkları),
- Yerin elektromanyetik özellikleri,

gözönüne alınmalıdır. Bunun yanı sıra, atmosferik kırılma indisi ya da deniz dalgallılığı gibi parametreler, mevsimsel özellikler ya da gece gündüz arası farklılıklar gibi nedenlerle zamana bağlı olarak da değişim gösterebilmektedir.

Özellikle haberleşme ve bilgi toplama sistemlerinin büyük önem kazandığı yüzyılımız içerisinde, pek çok araştırmacı bu karmaşık ve analitik modellenmesi zor olan problem üzerinde çalışmıştır. Bu konudaki yaygın literatüre örnek olarak, Wait (1962) ve Fock (1965) tarafından yazılan klasik olarak nitelenebilecek kitaplar ve bu çalışmayla daha çok ilgili olan birkaç makale gösterilebilir (Ishihara v. diğ., 1991a, 1991b; Sevgi v. diğ., 1998; Wait, 1998; De Minco, 2000). Bu yayınlarda dünya üzerinde EM yayılım probleminin çözümüne, genellikle küresel geometriye ve homojen atmosfere sahip dünya yüzeyi üzerine ya da belirli bir yüksekliğe yerleştirilmiş düşey/yatay elektrik dipol olarak belirlenen bir kaynak gözönüne alınarak başlanmakta ve problem çeşitli yaklaşımlarla çözülmesi mümkün denklemlere indirgenmektedir. Atmosferin yükseklikle ya da yüzey empedansının mesafe ile değişimi (kara-deniz geçişi) gibi EM yayılımın karakteristiğini (frekansa bağlı olarak) tamamen değiştirebilen çeşitli ortam parametreleri gene belirli yaklaşımlar altında elde edilen yaklaşık analitik ifadelerle eklenmektedir.

Var olan teknikler

Problemin tanımı ve spektral integral çözümü

Yüksek ve çok yüksek frekanslarda dünya üzerine düşey ya da yatay olarak yerleştirilen elektrik dipol tarafından oluşturulan elektromanyetik dalgaların yayılım probleminin çözümüne, homojen olmayan atmosfer tabakasıyla kaplı, yüzeyde empedans koşullarını sağlayan, küresel ve pürüzsüz bir dünya modeli tanımlanarak başlanabilir. Küresel koordinatlarda (r, θ, ϕ) , dünyanın yarıçapı $r=a$ olarak verilir ve dünya yüzeyi üzerindeki $(r=a)$ 'daki iletkenlik özelliği, Z_s olarak tanımlanan yüzey empedansı ile belirlenirse, $\theta=0$ ve $r' \geq a$ noktasındaki düşey yerleştirilmiş dipol kaynağın uyaracağı alanlar, yatayda simetri koşulu altında sadece radyal $rU(r, \theta)$ bileşenine sahip Hertz vektöründen elde edilebilir (Wait, 1962). Zamana bağımlılık $\exp(-j\omega t)$ olarak alınırsa:

$$\vec{E} = \nabla \times \nabla \times (U \vec{e}_r) \quad (1)$$

$$\vec{H} = -j\omega \epsilon \nabla \times (U \vec{e}_r) \quad (2)$$

$$E_r = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \quad (3)$$

$$E_\theta = \frac{1}{r \epsilon_r(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(\epsilon_r(r) r \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \quad (4)$$

$$H_\phi = \frac{j k_0 \epsilon_r(r)}{Z_0} \frac{\partial U}{\partial \theta} \quad (5)$$

$$E_\phi = H_\theta = H_r = 0 \quad (6)$$

yazılabilir. Skaler $U(r, \theta)$ fonksiyonu ise:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\epsilon_r(r)} \frac{\partial}{\partial r} [\epsilon_r(r) r U] \\ & + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} U \\ & + k_0^2 n^2(r) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

eşitliğini sağlar. Burada, $\epsilon_r(r)$ ve k_0 , sırasıyla, ortamın bağıl dielektrik geçirgenliğini ve boşluğun dalgasayısını, $n(r) = \sqrt{\epsilon_r(r)}$ ise atmosferin kırılma indisini göstermektedir. Dünya yüzeyi üzerinde sağlanması gereken sınır koşulu ise (Sevgi v. diğ., 1998):

$$E_\theta = -Z_s H_\phi \quad (8)$$

$$\frac{1}{r \epsilon_r(r)} \frac{\partial}{\partial r} [\epsilon_r(r) r U] = j \omega \epsilon_s(r) Z_s U$$

$$Z_s = Z_0 \left[\frac{j \omega \epsilon_0}{\sigma_g + j \omega \epsilon_g} \right]^{1/2} \left[1 + \frac{j \omega \epsilon_0}{\sigma_g + j \omega \epsilon_g} \right]^{1/2} \quad (9)$$

olarak verilmektedir. Atmosferin kırılma indisindeki değişimin ilgili terimlere oranla çok küçük olması nedeniyle (Wait, 1962; Sevgi v. diğ., 1998) dalga denklemi parabolik formda ifade edilebilmekte ve değişken dönüşümü ile dalga denklemi kartezyen koordinatlara indirgenebilmektedir. Bu durumda:

$$z = m\theta, \quad x = \frac{k_0}{m} (r - a), \quad x' = \frac{k_0}{m} (r' - a) \quad (10)$$

$$q = j m \epsilon_r(0) \frac{Z_s}{Z_0}, \quad n_0 = n(r = a), \quad m = \left(\frac{k_0 a}{2} \right)^{1/3} \quad (11)$$

olarak ifade edilen düz-dünya (flat-earth) yaklaşıklığı kullanılabilmektedir. Düz ve mükemmel

iletken bir yüzey üzerine düşey yerleştirilmiş dipol kaynak tarafından uyarılan $U_0(x, z)$ yardımı ile:

$$F(x, z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi z}} \frac{U(x, z)}{U_0(x, z)} e^{-j\pi/4} \quad (12)$$

şeklinde bir zayıflama fonksiyonu tanımlanmaktadır (Ishihara v. diğ., 1991a, 1991b; Sevgi v. diğ., 1998). Bu durumda (8) eşitliği yardımı ile elde edilen $x=0$ 'daki sınır koşulu:

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x; z) + q F(x; z) = 0 \quad (13)$$

olmak üzere kaynak uyarmalı dalga denklemi yaklaşık olarak:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + j \frac{\partial}{\partial z} + p(x) \right] F(x; z) = -\delta(z) \delta(x - x') \quad (14)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $p(x)$ eşdeğer dielektrik katsayısını göstermektedir. İndirgenmiş (13) dalga denklemi boyutsuz x, z koordinatlarında ayrıştırılabilir. Dalga sayısı β ve x 'e bağımlı Green fonksiyonu $g_x(x, x'; \beta)$ kullanılarak:

$$F(x, x'; z) = \frac{-1}{j2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\beta z} g_x(x, x'; \beta) d\beta \quad (15)$$

$$g_x(x, x'; \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, x'; z) e^{-j\beta z} dz$$

şeklindeki z -domeni Fourier dönüşümü ile fonksiyonun z 'ye bağıllığı kaldırılırsa x -domeninde tek boyutlu spektral Green fonksiyonu problemi:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + (p(x) - \beta) \right] g_x(x, x'; \beta) = -\delta(x - x') \quad (16)$$

olarak ifade edilebilir. (15) eşitliğindeki integral, geometrik optik (ışın tekniği) çözümlerini veren semer noktası (saddle point) ya da mod çözümlerini veren rezidü yaklaşıklıkları ile çözülebilir.

Modal ve geometrik optik–mod çözümler

Rezidü serileri kullanılarak elde edilen modal açılımlar ile yeryüzünde EM dalga yayılımı probleminin çözümüne dayanan Wait formülasyonu- dur. Buna göre, elektrik alanın düşey (radyal) bileşeni (Ishihara v. diğ., 1991a, 1991b; Sevgi v. diğ., 1998):

$$E_{\text{ver}} = E_0 F(x, x'; z) \quad (17a)$$

$$F(x, x'; z) = \left(\frac{\pi z}{2} \right) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{j\beta_s z}}{\beta_s - q^2} \frac{W(\beta_s - x)}{W(\beta_s)} \frac{W(\beta_s - x')}{W(\beta_s)} \quad (17b)$$

şeklinde hesaplanır. Burada:

$$E_0 = jk_0 Z_0 M_0 \frac{e^{jk_0 R_1}}{4\pi R_1} = -j30k_0 M_0 \frac{e^{jk_0 R_1}}{R_1} \quad (18)$$

momenti $M_0 = I dl$ olan elektrik dipol tarafından boşlukta d uzaklığında oluşturulacak elektrik alan değerini göstermektedir. Dünyanın efektif yarıçapı, a_e , alıcı ve verici yükseklikleri h_1 ve h_2 olmak üzere:

$$R_1 = \left[(a_e + h_1)^2 + (a_e + h_2)^2 - 2(a_e + h_1)(a_e + h_2)\cos(d/a_e) \right]^{1/2} \quad (19)$$

olarak tanımlanır. Denklem (17)'deki β_s , $g_x(x, x'; \beta)$ fonksiyonunun kutupları ve:

$$\frac{W(\beta_s - x)}{W(\beta_s)} \quad (20)$$

ise yükseklik-kazanç fonksiyonudur. Dünyanın eğriselliğini de içeren standart atmosfer (yükseklikle doğrusal artan kırılma indisi profili) için enine mod fonksiyonları $x=0$ 'da empedans sınır koşulunu da sağlayacak şekilde Airy fonksiyonları ile ifade edilir (Sevgi v. diğ., 1998):

$$W(\beta) = \sqrt{\pi} [Bi(\beta) - jAi(\beta)] \quad (21)$$

Norton, Sommerfeld tarafından 1909 yılında düz, kayıplı dünya yüzeyi için elde edilen zayıflama fonksiyonuna ilişkin çözümleri, pürüzsüz, yükselti içermeyen yeryüzünde geometrik optik yaklaşımını kullanarak elde etmiştir (De Minco, 2000). Geometrik ışın tekniğine dayanan Norton

çözümü, kaynağa yakın bölgelerde iyi sonuç vermektedir ve ufuk hattına doğru gidildikçe yöntem sonuçları kötüleşmektedir. Ufuk hattı ötesinde (gölge bölgede) ise modal açılımlara dayalı Wait formülasyonu ile daha doğru sonuçlar elde edilmektedir; bu yüzden bu iki yöntemin karma olarak kullanılması (Sevgi v. diğ., 1998) önerilmiştir. Bu çalışmada, geometrik optik ve mod çözümlerinin karma olarak kullanıldığı WAVEPROB algoritması gözönüne alınmıştır.

Adım adım parabolik denklem yöntemi

Yatayda açısal simetriye sahip ortamlarda dalga iletimi problemleri için x - yükseklik ve z - uzaklık olmak üzere iki boyutlu kartezyen koordinatlara geçilerek analitik işlemler kolaylaştırılabilir. Kırılma indisi n 'e göre homojen olan iki boyutlu bir ortamda yatay polarizasyon için $E_y(x, z)$, düşey polarizasyon için $H_y(x, z)$ bileşenleri cinsinden tanımlanan bir $\varphi(x, z)$ fonksiyonu:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k_0^2 n^2 \varphi = 0 \quad (22)$$

iki boyutlu skaler dalga denklemini sağlar. Genelde, kırılma indisi yükseklik ve uzaklığa bağlı olarak değişse de, değişim oranının dalga boyuna oranla çok yavaş olduğu ortamlar için homojen ortamda kullanılan dalga denklemi uygun ve yeterli olmaktadır. İki boyutlu dalga denklemini çözebilmek için, eksenel doğrultuya yakın açılarda mesafe ile yavaş değişen:

$$u(x, z) = e^{-jk_0 z} \varphi(x, z) \quad (23)$$

şeklinde yeni bir fonksiyon tanımlanırsa dalga denklemi $u(x, z)$ fonksiyonuna göre:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2jk_0 \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k_0^2 (n^2 - 1)u = 0 \quad (24)$$

şekline dönüşür. Eğer:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \ll k_0 \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \quad (25)$$

kabul edilirse (24) eşitliğindeki $\partial^2 u / \partial z^2$ terimi kaldırılarak:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2jk_0 \frac{\partial u}{\partial z} + k_0^2 (n^2 - 1)u = 0 \quad (26)$$

elde edilir. Bu yaklaşıklık sonucunda sadece tek yönlü dalga yayılımı modellenebilmektedir. Bir başka deyişle, (26) eşitliği, eksenel doğrultuya yakın açılarda ilerleyen dalgaların modellenmesi için geçerli olup geri yansıma etkilerini gözardı eder.

Helmholtz dalga denklemi bir sınır değer problemidir; ilgilenilen ortamda doğal ya da yapay sınırlarda dalga davranışını belirli sınır koşulları ile belirlemekte, çözümün varlığını ve tekliğini sağlamaktadır. Ancak (26)'daki parabolik denklem bir başlangıç-sınır değer problemidir. İki boyutlu (x,z) ortamda $z=z_0$ 'da skaler dalga fonksiyonu $u(z_0, x)$ biliniyorsa bu profil herhangi bir z uzaklığına ötelenebilir.

(26) eşitliği, ayrık (hızlı) Fourier dönüşümü (HFD) ve ters HFD ile x ve k_x (enine dalga sayısı) bölgeleri arasında gidip gelinerek çözülecek olursa:

$$u(z + \Delta z, x) = \exp\left[j \frac{k_0}{2} (n^2 - 1)\Delta z\right] \text{HFD}^{-1}\left[\exp\left[-j \frac{k_x^2 \Delta z}{2k_0}\right] \text{HFD}[u(z, x)]\right] \quad (27)$$

ifadesi elde edilir ve adım adım parabolik denklem (Split Step parabolic Equation, SSPE) olarak adlandırılır. Burada $\Delta z=z-z_0$, k_x , HFD ve HFD^{-1} sırasıyla mesafedeki adım büyüklüğünü, enine dalga sayısını, ayrık (hızlı) ve ters ayrık (hızlı) Fourier dönüşümünü göstermektedir. Bu yöntem ve ilgili kaynaklar Levy (2000) tarafından yazılan kitapta bulunabilir. SSPE yönteminde, yükselti farklılıkları, deniz dalgallılığının etkisi, pürüzlü yüzeyler ya da yüzey empedansı etkisi belli yaklaşımlar altında algoritma içine eklenebildiği için, uygulamalarda çoğunlukla kullanılan bir çözüm yöntemi olmuştur.

Zaman domenî yöntemi: TDWP

Bir önceki bölümde kısaca açıklan yöntemler, frekans domeninde çözüm üretirler. Bu bölümde, yer dalgası yayılım problemini doğrudan

doğruya zaman domeninde çözen saf sayısal yeni bir yöntem açıklanacaktır.

Maxwell denklemlerindeki konuma bağlı türev operatörlerinin Taylor açılımı kullanılarak ayrıklaştırılması ile elde edilen sonlu farklar (FD, Finite Difference) yöntemi, 1966 yılında K. S. Yee tarafından zamana bağlı türevlerin de aynı şekilde sayısallaştırılması ile zaman domenine taşınmış ve zamanda sonlu farklar (FDTD, Finite Difference Time Domain) yöntemi olarak adlandırılmıştır. Bu yöntemde, en genel halde, ortam Yee tarafından önerilen birim hücrelere bölünür ve her zaman adımında bu hücrelerin tümünde elektrik ve alan bileşenleri ayrı ayrı ilgili iteratif denklemler kullanılarak hesaplanır. En genel halde üç boyutlu FDTD yönteminde, her bir Yee hücresinde, hesap uzayındaki konumu (i, j, k) ile belirlenen 3 elektrik ve 3 manyetik alan bileşeni bulunmaktadır. Zaman ve konumdaki ayrık adımlar sırasıyla Δt ve Δx , Δy , Δz olarak tanımlanırlar. Her bir alan bileşeninin ait olduğu hücre (örneğin $E_x(i, j, k)$, $H_z(i, j, k)$) aynı (i, j, k) etiketi ile belirlendiği halde, hücredeki konumları birbirinden farklıdır. Bir hücre içindeki elektrik ve manyetik alanlar arasında da hesaplama sırasında $\Delta t / 2$ kadar bir zaman farkı bulunmaktadır. Ortam parametreleri ϵ (dielektrik geçirgenlik), μ (manyetik geçirgenlik), σ (iletkenlik) yardımıyla herhangi bir hesap uzayı içine her türlü nesne yerleştirilebilir. Hesaplamalar zaman domeninde yapıldığı için, kaynak fonksiyonu olarak darbesel bir işaret kullanıldığında, tek bir FDTD simülasyonu ile, geniş bantlı çözümler elde edilebilmektedir.

Özellikle son yıllarda, birbirinden farklı ve karmaşık, analitik çözümü zor bulunan ya da hiç bulunamayan elektromanyetik problemlerin çözümünde etkin olarak kullanılan FDTD yöntemi, Akleman ve diğerleri (2000) tarafından ilk kez atmosferde yer dalgası yayılımının modellenmesi için uygun hale getirilmiş ve Time Domain Wave Propagator (TDWP) olarak adlandırılmıştır. Bunun için, diğer analitik ve analitik-sayısal yöntemlerde olduğu gibi ortam yatayda simetrik kabul edildiğinden iki boyutlu FDTD yöntemi kullanılmıştır. Dünya üzerine yerleştirilen elektrik dipol tarafından uyarılan alanlar iki boyutlu uzay-

da TM_z modunun yayılmasına neden olurlar. Bu yüzden, iki boyutlu TM_z yer dalgası yayılımını modellemek üzere, iteratif denklemleri:

$$E_x^n(i, k) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \sigma \Delta t} E_x^{n-1}(i, k) - \frac{\Delta t}{(\varepsilon + \sigma \Delta t) \Delta z} [H_y^{n-1/2}(i, k) - H_y^{n-1/2}(i, k-1)] \quad (28)$$

$$E_z^n(i, k) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \sigma \Delta t} E_z^{n-1}(i, k) + \frac{\Delta t}{(\varepsilon + \sigma \Delta t) \Delta x} [H_y^{n-1/2}(i, k) - H_y^{n-1/2}(i-1, k)] \quad (29)$$

$$H_y^{n+1/2}(i, k) = H_y^{n-1/2}(i, k) - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta z} [E_x^{n-1}(i, k+1) - E_x^{n-1}(i, k)] + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x} [E_z^{n-1}(i+1, k) - E_z^{n-1}(i, k)] \quad (30)$$

şeklinde verilen E_x , E_z , H_y bileşenleri gözönüne alınmıştır. TDWP yönteminde, pürüzlü yüzey ve yükselti farklılıklarının yer dalgası yayılımına etkisini katmak oldukça kolaydır, ancak yüzey empedansının hesaplara katılması için iteratif FDTD denklemlerinde bazı değişiklikler yapmak gerekmektedir. Tüm bu özellikler göze alındığında TDWP algoritması aşağıdaki şekilde açıklanabilir:

- Yayılım ortamı FDTD hesap uzayına oranla çok daha büyük olduğu için, FDTD hesap uzayı, bu ortamı, hareketli bir alt bölge gibi ilerleyerek kaplar. (Şekil 1) Açık sınır bölge koşullarını sağlamak için, FDTD hesap uzayı soldan, sağdan ve tepeden mükemmel uyumlu tabaka (PML, perfectly matched layer) bloklarıyla kaplanır. Mükemmel iletken varsayılan ve mesafe ile değişen yükselti farklılıkları kayarak ilerleyen alt bölge içine dinamik olarak eklenir. Yükselti içinde kalan elektrik alan bileşenlerine sıfır değeri atanır. Yükselti ile hava sınırı boyunca ise E_x , E_z bileşenleri ya da gerekirse her ikisi birden yükselti farklılıklarını basamak yaklaşıklığı ile modelleyecek şekilde sıfırlanır. $\varepsilon_r = n^2(x, z)$ yardımıyla, dünya yüzeyi üzerinde istenilen kırılma

indisi profili (üstel, lineer, bi-lineer, tri-lineer, v.b.) yerleştirilebilir.

- Yüzey empedansı sınır koşulu FDTD iteratif denklemlerine farklı yaklaşımlarla eklenebilir (Beggs ve diğ., 1992). TDWP içine de benzer bir algoritma yerleştirilerek, herhangi bir kayıplı yüzeyin ya da kara-deniz geçişlerinin yer dalgası yayılımına etkileri etkileri hesaplanabilir (Sevgi v. diğ., 2002). TDWP algoritmasında, empedans yüzeyinin üzerindeki ilk magnetik alan bileşeni (30) eşitliğinden farklı olarak:

$$H_y^{n+1/2}(i, k) = \frac{1 - \frac{R_s \Delta t}{2\mu_0 \Delta x} - \frac{L_s}{\mu_0 \Delta x}}{1 + \frac{R_s \Delta t}{2\mu_0 \Delta x} - \frac{L_s}{\mu_0 \Delta x}} H_y^{n-1/2}(i, k) - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta z (1 + \frac{R_s \Delta t}{2\mu_0 \Delta x} - \frac{L_s}{\mu_0 \Delta x})} [E_x^n(i, k+1) - E_x^n(i, k)] + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x (1 + \frac{R_s \Delta t}{2\mu_0 \Delta x} - \frac{L_s}{\mu_0 \Delta x})} [E_z^n(i+1, k)] \quad (31)$$

şeklinde hesaplanır. Yüzey üzerindeki E_z bileşeni ise sıfıra eşitlenir. Frekans domenindeki TM_z problemi için R_s ve L_s :

$$E_z(\omega) = Z_s(\omega) H_y(\omega) \quad (32)$$

$$Z_s(\omega) = R_s(\omega) + jX_s(\omega), X_s(\omega) = \omega L_s(\omega) \quad (33)$$

şeklinde tanımlanan yüzey empedansının direnç ve reaktans bileşenleridir. Burada ω açısal frekansı gösterir. R_s ve L_s için sayısal değerler kayıplı yüzey parametreleri ile yapılan yüzey empedansı tanımından elde edilir. Örnek olarak, deniz gibi iletkenliği yüksek ortamlar için (Beggs v. diğ., 1992):

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}}, \quad L_s = \sqrt{\frac{\mu}{2\omega \sigma}} \quad (34)$$

olarak hesaplanır. Ancak, eğer kara gibi iletkenliği düşük ortamlar söz konusu ise sayısal değerleri bulmak için:

$$R_s = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt[4]{\epsilon^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2}}} \cos \left[\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right) \right]$$

$$L_s = \frac{1}{\omega} \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt[4]{\epsilon^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2}}} \sin \left[\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right) \right] \quad (35)$$

eşitlikleri kullanılabilir. Yüzey empedansı, R_s ve L_s bileşenleri frekans ortamında tanımlanmıştır ancak FDTD denklemlerinde zamana bağlı değerlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Zaman domen tanımlarına geçebilmek için (34) denklemindeki çarpım işlemi konvolüsyona dönüştürülmelidir. Bu ise, zaman domeninde fazladan hesaplama yapılmasını zorunlu kılmaktadır. Konvolüsyon işlemini ortadan kaldırmak için frekansa bağımlı olmayan R_s ve L_s değerleri, (34)-(35) eşitliklerinde TDWP algoritmasındaki darbeye ait merkez frekansı kullanılarak hesaplanır. Daha sonra (32) denkleminin ters Fourier dönüşümü ile zaman domenine taşınması ile elde edilen (31) eşitliği ile yüzey empedansı sınır koşulu algoritma içine katılmış olur.

- İlgili alanın yüksekliğe göre değişen başlangıç profili, anten ışınma diyagramını ya da çizgisel bir kaynağı modelleyecek şekilde istenilen yükseklikte yerleştirilir. Konumsal dağılımı nasıl olursa olsun, tek bir FDTD simulasyonunda geniş bantlı çözümlerin elde edilmesini sağlayacak şekilde zamanda darbesel bir kaynak uygulanmalıdır.

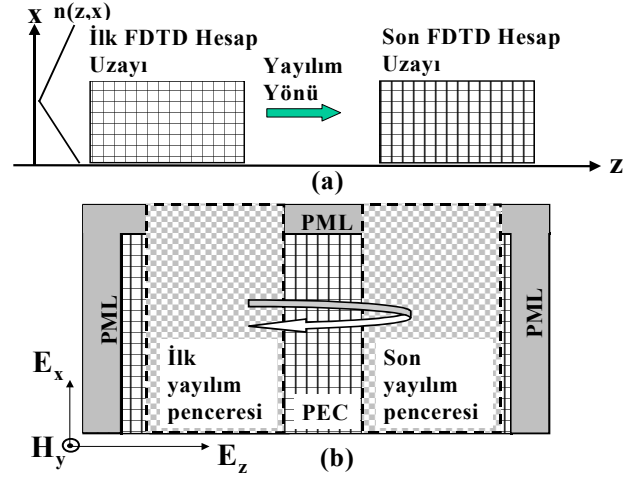
- Tek yönlü yayılım iki boyutlu dikdörtgensel bir pencere ile izlenir. Bu yayılım penceresi, direkt, yerden yansıyan ve yüzey dalgasına ait bilgileri taşıyan darbeyi içerir.

- Bu sanal pencere FDTD hesap uzayı içinde soldan sağa doğru (darbenin ilerleme yönünde) hareket eder ve hesap uzayının sonuna ulaştığında, bir sonraki FDTD hesap uzayının başlangıç profilini oluşturmak üzere tekrar sol başa döner. Bu işlem ve ardışıl FDTD simulasyonları dalga istenilen uzaklığa ulaşana kadar devam eder.

- Yayılım penceresinin hesap uzayında ilerlemesi sırasında mesafede kapsanan FDTD

hücrelerinin sayısı dikkate alınarak, enine veya uzunlamasına yayılım karakteristikleri elde edilir.

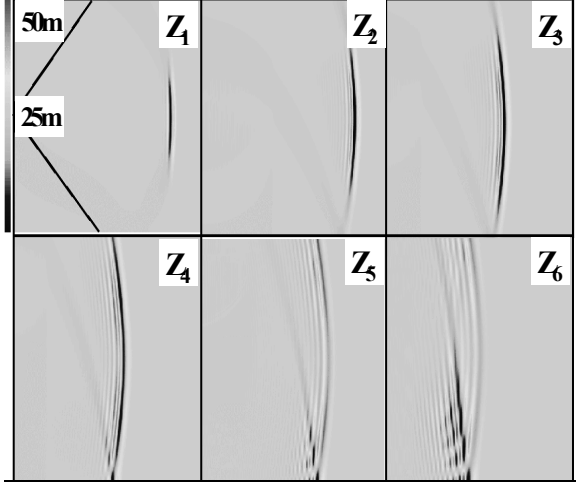
Yukarıda açıklanan TDWP algoritmasının yardımıyla direk, yerden yansıyan dalgalar ve yüzey dalgaları zaman domeninde, dalga cephelerinin ve girişimlerinin (dalga maksimum ve minimumları) iki boyutlu olarak görüntülenmesi ile rahatlıkla izlenebilmektedir.



Şekil 1. TDWP şeması (a) x eksen yükseklik, z eksen mesafeyi göstererek şekilde tanımlanan iki boyutlu yayılım uzayı. (b) Tek bir FDTD uzayının detaylı gösterimi

Şekil 2’de bi-lineer kırılma indisi profili için elde edilen görüntüler verilmiştir. Başlangıç mesafesinde yükseklikle değişen alan dağılımı, Gauss tipi bir fonksiyona bağlı olarak yerleştirilmiştir. Gauss fonksiyonunun maksimum değeri 25m’deki verici yüksekliğine denk gelecek ve yaklaşık sıfır değerine ulaştığı yükseklik noktaları arasında 15m olacak şekilde seçilmiştir. Burada, 50m×50m’lik FDTD hesap uzayı, 0.1m konumsal ayrıklaştırmayla 500 × 500 hücre kullanılarak oluşturulmuştur. Başlangıç alan dağılımı, zamanda Gauss fonksiyonunun birinci türevi şeklinde darbesel bir yapıya sahiptir (merkez frekansı: 200MHz, band genişliği 200MHz). 500×250 hücrelik (kapsanan yükseklik: 50m, mesafe: 25m) bir FDTD penceresinin 20 defa ilerletilmesiyle mesafede kapsanan hücre sayısı 5000’e çıkarılmıştır. Şekil 2’de değişik zaman adımlarında kaydedilen anlık değişimler yardımıyla değişik mesafelerdeki alan

profilleri gösterilmiştir. Şekilde görüldüğü gibi, dalga yeryüzü üzerinde sağa doğru ilerlemektedir ($z=Z_1$). Silindirik saçılma nedeniyle yayılım sırasında genişleyerek yüzeye ulaşır ($z=Z_2$ ve $z=Z_3$). Daha sonra yüzeyden yansıyarak direk dalga ile girişim yapar ($z=Z_4$, $z=Z_5$, $z=Z_6$ pencerelerinde görüldüğü gibi).



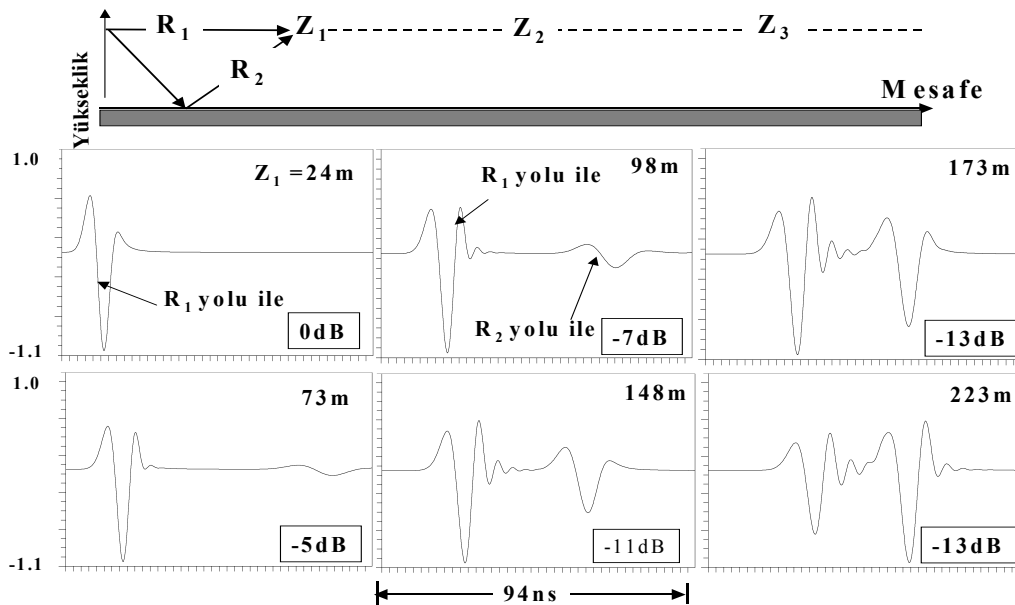
Şekil 2. İki boyutlu uzayda zeminden 25m yüksekteki bir Gauss darbesinin yayılımının zamanda simülasyonu. Altı pencere soldan sağa ve yukarıdan aşağıya değişik anlarda (dolayısıyla değişik uzaklıklarda) dalga yayılımını göstermektedir.

Şekil 2'deki darbe yayılımını için, sabit yükseklikte (yeryüzünün 25m üstünde) farklı mesafelerde (6 farklı FDTD penceresinde) kaydedilen 94ns'lik zaman değişimleri Şekil 3'te görülmek-

tedir. Her bir mesafedeki dağılım kendi maksimumuna göre normalize edildiği için ilk pencereye göre bağlı alan değerleri dB cinsinden verilmiştir. 24m uzaklıkta, sadece ilk darbenin etkisinin görülmesinin nedeni, yerden yansıyarak gelen ikinci darbenin gecikme süresinin FDTD penceresinin uzunluğuna oranla büyük olmasıdır. Mesafe arttıkça R_1 - R_2 'lik yol farkı azalmakta ve ikinci pencereden (73m uzaklık) itibaren yerden yansıyan dalga'nın etkisi de gözlenmeye başlamaktadır.

Son iki FDTD penceresinde direk dalga ile yerden yansıyan dalga'nın neredeyse artık birbirinden ayırtedilemez hale geldiği açıkça belirgindir. Zaman domeninde elde edilen sonuçlardan, frekans domenine geçilerek frekans domeni yöntemleri ile karşılaştırma yapılabilir. Örnek olarak, alanın tek bir frekansta belirli bir mesafede yükseklikle değişimini hesaplamak için aşağıdaki işlemler uygulanmalıdır.

- TDWP simülasyonu sırasında, istenilen mesafede, değişik yüksekliklerde dalga'nın zamandaki değişimi darbenin tamamı geçip gidene kadar biriktirilir.
- TDWP simülasyonu tamamlanınca, uygulanan kaynak darbesinin band genişliği içinde olan herhangi bir frekansta çevrim dışı ayrık Fourier dönüşümü ile alanın yükseklikle değişimi elde edilir.



Şekil 3. Dalga'nın yüzeyden 25m yükseklikte kaynaktan değişik uzaklıklarda zamanla değişimi.

Uygulamalar

TDWP-SSPE karşılaştırması

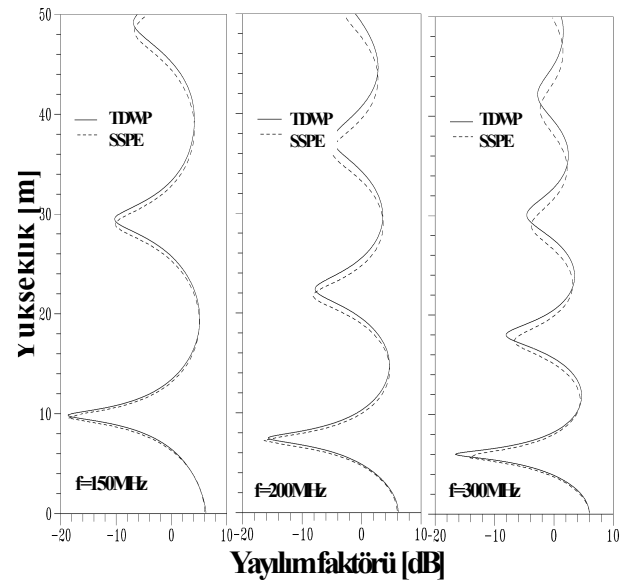
FDTD yöntemi ile yüzey dalgası yayılım probleminin çözümünün doğruluğunu ve uygulanabilirliğini kontrol etmek için ilk olarak SSPE yöntemi ile karşılaştırma yapılmıştır. Bunun için, yükseklikle lineer azalarak düzlemsel dünya yüzeyi üzerinde yüzey kanalı oluşturan kırılma indisi profili gözönüne alınmıştır. Elektromanyetik dalgalar bu doğal kanal içinde tuzaklanarak ilerlerler. Yüzey kanalı probleminin SSPE ve FDTD ile çözümleri sırasında, her iki yöntem için de başlangıç mesafesinde yükseklikle değişen alan dağılımı, Gauss tipi bir fonksiyona bağlı olarak yerleştirilmiştir ve 500m uzaklığa kadar ilerlenmiştir. SSPE ile FDTD sonuçlarının karşılaştırılması yayılım faktörleri ($|E/E_0|$) hesaplanarak gerçekleştirilmiştir (Şekil 4). Yayılım faktörü, SSPE ve FDTD için benzer şekilde, algoritmaların ikişer kez çalıştırılmasıyla bulunmaktadır. İlk seferinde, yeryüzü üzerinde yayılım modellenerek E değeri hesaplanır, ikinci simülasyonların ise boş uzaydaki yayılım için tekrarlanmasıyla (E_0 için) yayılım faktörleri elde edilir. FDTD sonuçları için, SSPE simülasyonunda yüzeyde Neumann tipi sınır koşulunun uygulanmasına karşılık gelen düşey elektrik alan bileşeni kullanılır. Şekil 4'te, SSPE ve FDTD sonuçları arasında çok iyi bir uyum gözlenmektedir.

TDWP-SSPE karşılaştırmaları sırasında, atmosferik koşullar nedeniyle yükseltilmiş oluk etkisinin olduğu bir ortamda, eğimli bir arazi üzerindeki EM yayılım da incelenmiştir.

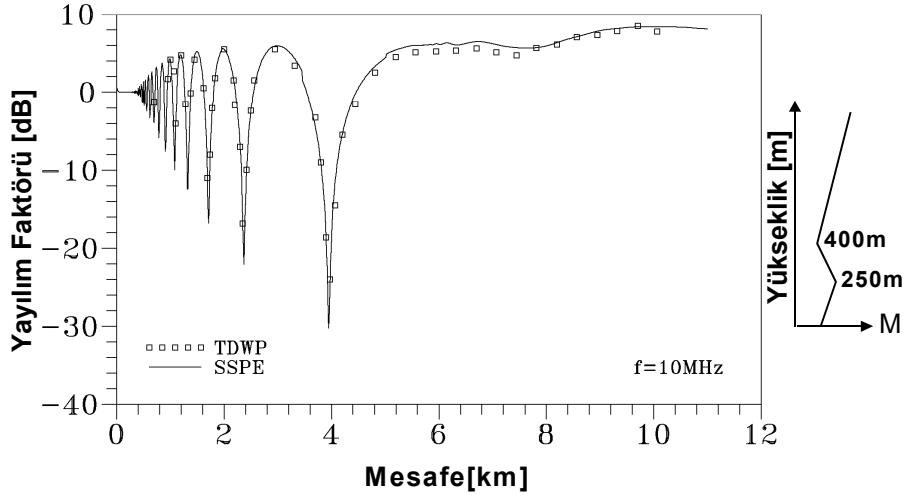
Normalde, standart atmosferin kırılma indisinin yükseklikle azaldığı bilinmektedir, ancak dünyanın eğriselliği gözönüne alındığında, kırılma indisi yükseklikle artar hale gelmekte, bunun sonucunda da EM işaret, uzak mesafelere ilerledikçe yeryüzeyinden gitgide uzaklaşmaktadır. Ancak zaman zaman, atmosferdeki sıcaklık, basınç ve su buhar basıncı değişimlerine bağlı olarak, kırılma indisi, dünyanın eğriselliğinin gözönüne alındığı durumlarda da, belirli mesafe ve yüksekliklerde, yükseklikle azalabilmektedir. Böyle durumlarda, yüzey üzerinde ya da tropos-

fer içinde EM dalgaların tuzaklanarak ilerlediği kanallar oluşmakta ve bu sayede çok uzak mesafelere yayılım mümkün olmaktadır. Şekil 5'te, yükseltilmiş kanalın olduğu bir ortamda, ilk 5.5km boyunca mesafe ile lineer olarak alçalan, 5.5-11km arasında ise yüksekliği sabit kalan bir arazi üzerinde yayılan EM işaretin, belirli bir yükseklikte mesafe ile değişimleri yayılım faktörü cinsinden verilerek, SSPE ve TDWP sonuçları karşılaştırılmaktadır. Burada, SSPE geri saçılımların etkisini hiç gözönüne almadığı halde TDWP kayan pencere içindeki kaldığı sürece yerel geri saçılmaları modelleyebildiği için, ileriye doğru saçılımın baskın kabul edilebileceği arazi tipi seçilmiştir.

Şekil 6'da ise, aynı ortam için, dalgaboyu cinsinden kaynaktan farklı uzaklıklarda yayılım faktörünün yükseklikle değişimi verilmiştir. Eğimli arazinin yayılımı ne derece değiştirdiğini göstermek amacıyla yükselti farkı yokken, yani düz arazi üzerinde elde edilen SSPE sonuçları da bu şekilde ayrıca verilmiştir.



Şekil 4. Kaynaktan 500m uzakta yayılım faktörünün ($|E/E_0|$) yükseklikle değişimi (150 MHz, 200 MHz ve 250 MHz'deki hesaplar sırasıyla kaynaktan 250λ , 330λ 415λ uzaklığa denk gelmektedir).



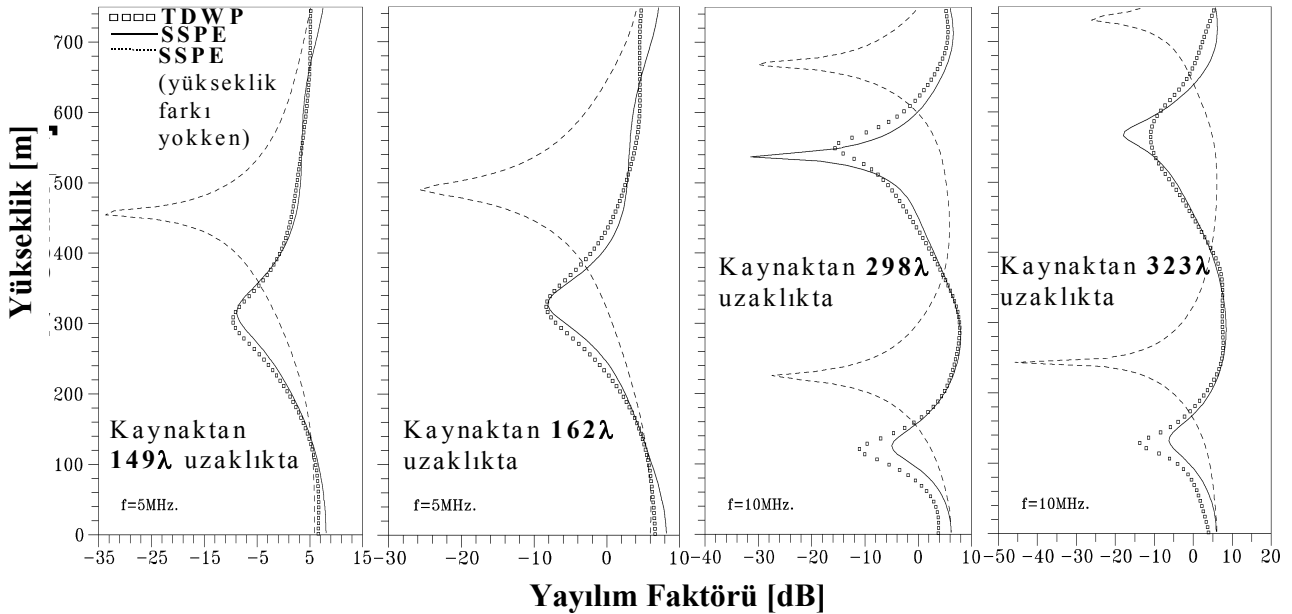
Şekil 5. Yayılım faktörünün mesafe ile değişimi

TDWP-WAVEPROB karşılaştırması

Yer dalgası yayılım problemlerinde 100MHz üstündeki frekanslarda yüzeyin mükemmel iletken kabul edilmesi mühendislik açısından uygun bir yaklaşıklık olduğu halde özellikle 100MHz altındaki frekanslarda çalışırken yüzey empedansı etkisinin hesaplamalara katılması gerekmektedir.

Bu bölümde, kara-deniz geçişlerinin olduğu yerlerde yüzey empedansının etkileri hem TDWP, hem de WAVEPROB (karma ışın-mod yöntemi) ile ayrı ayrı incelenmiş ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Farklı yüzey empedanslarının

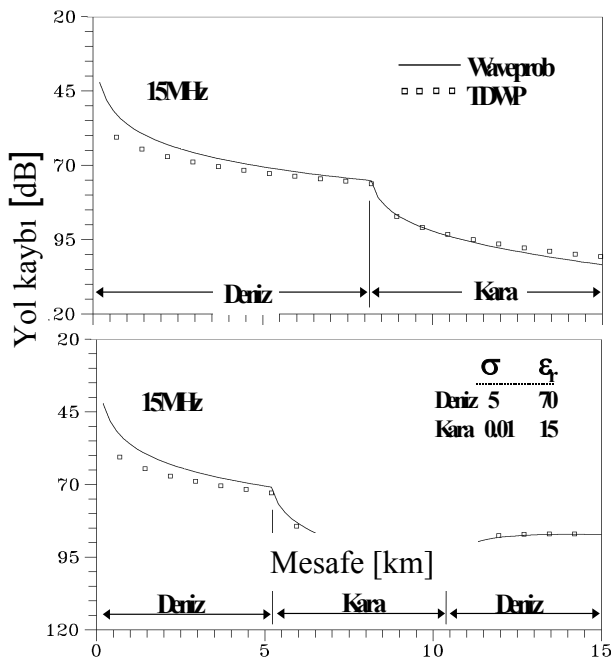
etkisi WAVEPROB algoritması içine Millington eğri uydurma yöntemi kullanılarak eklenmiştir. Şekil 7’de, deniz-kara geçişlerini içeren yayılım senaryolarında 15 MHz için mesafe boyunca hesaplanan yüzey dalgası yol kaybı çizilmiştir. TDWP’de, yüzey üzerine yerleştirilmiş Gauss tipi bir dağılıma sahip kaynak kullanılmıştır. Bu kaynak, zamanda da merkez frekansı 10MHz, ve 20dB band genişliği 15MHz olan bir darbedir. WAVEPROB’da ise kaynak olarak kısa dipol kullanılmıştır. Şekil 7’de, üst-teki senaryoda, ilk 8km deniz, geri kalan bölge ise kara olarak seçilmiştir; alttaki senaryoda ise, deniz-kara-deniz geçişini oluşturacak şekilde, deniz



Şekil 6. Yayılım faktörünün yükseklik ile değişimi

üzerindeki kaynaktan 5km uzakta ve 5km uzunluğunda bir ada bulunmaktadır. Tüm hesaplamalarda iletkenlik ve bağıl dielektrik sabiti kara için $\sigma=0.003$ [S/m], $\epsilon_r=15$; deniz için $\sigma=5$. [S/m], $\epsilon_r=70$ olarak alınmıştır.

Her iki şekilde de görüldüğü gibi, TDWP ve WAVEROB sonuçları arasında oldukça iyi bir uyum vardır. Dikkat edilirse, deniz üzerinde karadakine oranla daha az yol kaybı görülmektedir, ve deniz üzerinden karaya doğru geçen EM dalga burada birden zayıflamaktadır. Ancak, Şekil 7’de altta görüldüğü gibi karadan tekrar denize doğru geçen işaret kendini toparlamaktadır; bu durum, ilk kez Millington tarafından yapılan ölçümler sonucunda gözlenmiştir.



Şekil 7 Deniz-kara geçişi için yüzey dalgası yol kaybı. Düz çizgi: WAVEPROB, sembol: TDWP.

Sonuçlar

Bu çalışmada, homojen olmayan dünya üzerinde yer dalgası yayılımının zaman ve frekans domeninde sayısal incelemesi üzerinde durulmuştur. Yükselti farklılıklarının, yüzey empedansının ve homojen olmayan troposfer tabakasının etkileri de gözönüne alındığında analitik tam çözümü henüz bulunamamış olan bu problem, var olan ve frekans domeninde

geçerli ışın-mod çözümü ya da SSPE gibi yaklaşık analitik yöntemlerle incelenmiştir. Daha sonra ayırıklaştırma dışında yaklaşıklık içermeyen saf sayısal bir zaman domeni yöntemi olan TDWP önerilmiş ve geçerlilik bölgeleri içinde diğer tekniklerle karşılaştırılmıştır. Konu ile ilgili çalışmalarımızdan bazıları (Akleman v. diğ., 2000, Sevgi v. diğ., 2002, Akleman v. diğ., 2002) olarak verilebilir.

TDWP, FDTD yöntemine dayanmaktadır. Ancak, yer dalgası yayılımını zaman domeninde inceleyebilmek için elektromanyetik alanların uzak mesafelere doğru ilerlerken izlenmesi gerekmektedir; bu da, günümüz teknolojisinin imkanları ihtiyaç duyulan bilgisayar kapasitesini karşılamadığından geleneksel FDTD algoritmaları ile imkansızdır. Bu güçlük, yayılım bölgesinin FDTD uzayı içinde kayan bir pencere yardımı ile takip edilmesi sayesinde ortadan kaldırılmaya çalışılmıştır ve oluşturulan algoritmaya TDWP adı verilmiştir. FDTD’de kayan pencere yönteminin kullanılması, farklı araştırmacılar tarafından, dünya – iyonosfer arasında alçak frekans (LF) ve çok alçak frekanslarda (VLF) yayılım gibi diğer bazı uzun mesafeli EM dalga iletimi problemleri için de uygulanmıştır (Berenger, 1999). Dalga klavuzu gibi yapılarda da, benzer şekilde, karma ışın–FDTD yöntemi kullanılmıştır (Pemper v. diğ., 2000).

Analitik formülasyonların standart atmosferle çevrili pürüzsüz dünya üzerinde koordinat ayırıştırma yöntemine dayanması nedeniyle, ışın-mod ve onların birlikte kullanılmasından oluşan yöntemler:

- yükselti farklılıkları ya da pürüzlülük içeren bölgelerde,
- düşey ve/veya yatayda homojen olmayan atmosfer tarafından oluşturulan yüzey ya da yükseltilmiş kanalların bulunduğu bölgelerde

yer dalgası yayılım problemi için uygulanabilir değildir. Sadece pürüzlü yüzey etkileri WAVE PROB içine yaklaşık olarak eklenebilir. SSPE ile her ne kadar düşey ve/veya yatayda homojen olmayan atmosfer içindeki dalga yayılımını

izlemek mümkün olsa da, bu yöntem geri yansıma etkilerini gözardı eder ve özellikle çok yüksek frekans (VHF) ve üzerindeki frekanslarda baskın olarak tek yönde ilerleyen dar bandlı dalgaların yayılımının modellenmesi için daha uygundur.

TDWP, şu aşamada hesaplamalar nispeten yavaş olduğu ve daha yüksek kapasiteli bilgisayarlara ihtiyaç duyulduğu halde, geniş bandlı dalga (darbe) yayılımının gerçek ortamlarda incelenmesi açısından etkili ve güvenilir bir yöntemdir ve hem yayılan hem de klavuzlanmış dalga problemlerinin çözümü için rahatlıkla kullanılabilir. Hesap uzayının genişletilmesiyle FDTD hesap uzayının üst yutucu tabakalarından gelen istenmeyen yansımalar ile ayırıklaştırma sınırlamalarından kaynaklanan sayısal dispersiyonun bozucu etkileri artar ve bu durum şu aşamada TDWP yöntemine ait en önemli kısıtlamadır. Ancak gene de yapılan incelemelerde, bir kaç bin dalgaboyu mesafesine rahatlıkla ulaşılabilirdiği görülmüştür. Bu kısıtlamaların etkisini azaltmak için, pencereleme, işaret kestirimi gibi bazı işaret işleme teknikleri de algoritma içine katılabilir. Özellikle bilgisayar hafıza ve hızındaki artışlar gözönüne alınırsa, daha etkin yutucu sınır algoritmalarının da gelişmesiyle TDWP yöntemine ilişkin kısıtlamaların en aza indirgeneceğine inanmaktayız.

Kaynaklar

- Akleman, F., Sevgi, L. (2000). A Novel Time-Domain Wave Propagator, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **48**, 5, 839-841.
- Akleman, F., Özyalçın, M. O., Sevgi, L. (2002). Novel Time Domain Radiowave Propagators for Wireless Communication Systems, *Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences, Special Issue*, **10**, 2, 199-217.
- Beggs, J. H., Luebbers, R. J., Yee, K. S., Kunz, K. S. (1992). Finite-Difference Time-Domain Implementation of Surface Impedance Boundary Conditions, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **40**, 1, 49-56.
- Berenger, J. P. (1999). Finite Difference Computation of VLF-LF Propagation in the Earth-Ionosphere Waveguide, *Proc. Of URSI XXVI General Assembly*, Toronto, 464.
- De Minco, N. (2000). Propagation Prediction Techniques and Antenna Modeling (150 to 1705 kHz) for Intelligent Transportation Systems (ITS) Broadcast Applications, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation Magazine*, **42**, 4, 9-33.
- Fock, V. A. (1965). *Electromagnetic Diffraction and Propagation Problems*, Oxford, Pergamon Press.
- Ishihara T., Felsen, L. B. (1991). Hybrid Ray-mode Parametrization of High Frequency Propagation in an Open Waveguide with Inhomogeneous Transverse Refractive Index: Formulation and Application to a bilinear Surface Duct, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **39**, 6, 780-788.
- Ishihara T., Felsen, L. B. (1991). Hybrid Ray-mode Parametrization of High Frequency Propagation in an Open Waveguide with Inhomogeneous Transverse Refractive Index: Numerical Results and Quality Assesment, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **39**, 6, 789-797.
- Levy, M. (2000). *Parabolic Equation Methods for Electromagnetic Wave Propagation*, Institution of Electrical Engineers
- Pemper, Y., Lomakin, V., Heyman, E. ve Kastner, R. (2000). Moving Coordinate Frame FDTD Analysis of Long Range Tracking of Pulsed Fields in Graded Index Waveguides, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, **14**, 493-396.
- Sevgi, L., Felsen, L. B. (1998). A new Algorithm for Ground Wave Propagation Based on a Hybrid Ray-Mode Approach, *Int. J. of Numerical Modeling*, **11**, 2, 87-103.
- Sevgi, L., Akleman, F., Felsen, L. B. (2002). Ground Wave Propagation Modeling: Problem-Matched Analytical Formulations and Direct Numerical Techniques, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation Magazine*, **44**, 1, 55-75.
- Wait, J. R. (1962). *Electromagnetic Waves in Stratified Media*, Oxford, Pergamon Press.
- Wait, J. R. (1998). The Ancient and Modern History of EM Ground-Wave Propagation, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation Magazine*, **40**, 5, 7-24.